Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 Septiembre 2015

[2'5 puntos] Halla los valores a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x + c}$.
Tiene una asíntota vertical en x = 1, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local de abscisa x = 3.

Solución

Halla los valores a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x + c}$. Tiene una asíntota vertical en x = 1, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local de abscisa x = 3.
Sabemos que la recta x = a es una asíntota vertical (A.V.) de la función f(x) si y solo si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ¸

Las asíntotas verticales se suelen presentar en cocientes, y son los números que anulan el denominador. Después hay que comprobar que el límite es ∞.
En nuestro caso $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$, y si igualamos el denominador a cero tenemos x + c = 0, de donde x = -c, por tanto -c = 1, de donde **c = -1**. Luego $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x - 1}$.
Sabemos que la recta y = mx + n es una asíntota oblicua (A.O.) de la función f(x) si y solo si $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$. En la práctica $m = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$.
En los cocientes de funciones polinómicas la A.O. en $+\infty$ coincide con la de $-\infty$
También sabemos que la pendiente de y = mx + n es m, que me han dicho que vale 2, luego

$m = 2 = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{ax^2 + b}{x - 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2 + b}{x^2 - x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (a) = a$, por tanto **a = 2**. Tenemos $f(x) = \dfrac{2x^2 + b}{x - 1}$.

Sabemos que los extremos locales anulan la primera derivada, en nuestro caso como x = 3 es un extremo local tenemos **f '(3) = 0**

$f(x) = \dfrac{2x^2 + b}{x - 1}$; $f'(x) = \dfrac{4x\cdot(x - 1) - (2x^2 + b)\cdot 1}{(x - 1)^2}$. Si un cociente es 0, lo que es 0 es el numerador, luego de *f '(3) = 0 tenemos 0* = $4(3)\cdot(3-1) - (2(3)^2 + b) = 24 - 18 - b$, por tanto **b** = 24 – 18 **= 6.**

Los valores pedidos son **a = 2, b = 6 y c = -1.** La función sería $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6}{x - 1}$.

Ejercicio 2 opción A, modelo 3 Septiembre 2015

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi} x^2\cdot \text{sen}(x)dx$.

Solución

Calculamos primero la integral indefinida $I = \int x^2\cdot\text{sen}(x)\cdot dx$, que es una integral por partes.
$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

$I = \int x^2\cdot\text{sen}(x)\cdot dx = \{ u = x^2 \to du = 2xdx;\ dv = \text{sen}(x)\cdot dx \to v = \int \text{sen}(x)\cdot dx = -\cos(x) \} =$
$= x^2\cdot(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))\cdot 2x\cdot dx = -x^2\cdot\cos(x) + \int 2x\cdot\cos(x)\cdot dx = -x^2\cdot\cos(x) + I_1$
$I_1 = \int 2x\cdot\cos(x)\cdot dx = \{ u = 2x \to du = 2dx;\ dv = \cos(x)\cdot dx \to v = \int \cos(x)\cdot dx = \text{sen}(x) \} =$
$= 2x\cdot\text{sen}(x) - \int 2\cdot\text{sen}(x)\cdot dx = 2x\cdot\text{sen}(x) - 2\cdot(-\cos(x)) = 2x\cdot\text{sen}(x) + 2\cos(x)$.

Luego I = $\int x^2\cdot sen(x)\cdot dx = - x^2\cdot cos(x) + I_1 = -x^2\cdot cos(x) + 2x\cdot sen(x) + 2cos(x) + K$.

La integral pedida es $\int_0^{\pi} \mathbf{x^2\cdot sen(x)\cdot dx} = [-x^2\cdot cos(x) + 2x\cdot sen(x) + 2cos(x) + K]_0^{\pi} =$
$= (-\pi^2\cdot cos(\pi) + 2\pi\cdot sen(\pi) + 2cos(\pi) + K) - (-0^2\cdot cos(0) + 2(0)\cdot sen(0) + 2cos(0) + K) =$
$= (-\pi^2\cdot(-1) + 0 - 2 + K) - (-0 + 0 + 2 + K)$ $\mathbf{= \pi^2 - 4}$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 Septiembre 2015

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1'5 puntos] Determina la matriz X para la que $A^tXB^{-1} = C$, (A^t la matriz traspuesta de A).
b) [1 puntos] Calcula el determinante de $B^{-1}(C^tC)B$, (C^t la matriz traspuesta de C).

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

a)
Determina X con $A^tXB^{-1} = C$.

Sabemos que una matriz tiene inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$ si su determinante es distinto de cero.

Como $det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$, existe A^{-1}. También sabemos que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Como $det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (en las matrices triangulares el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal), existe B^{-1}.

Multiplicamos la expresión $A^tXB^{-1} = C$ por la izquierda por $(A^t)^{-1}$, y por la derecha por B.
$(A^t)^{-1}A^tXB^{-1}\cdot B= (A^t)^{-1}\cdot C\cdot B \Rightarrow I\cdot X\cdot I= (A^t)^{-1}\cdot C\cdot B \Rightarrow X= (A^t)^{-1}\cdot C\cdot B$.

$det(A) = -3$; $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

$A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (-1/3)\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(A^{-1})^t = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{X= (A^t)^{-1}\cdot C\cdot B =} (1/3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= (1/3)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix} = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} -7 & \frac{10}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}$

b)
Calcula el determinante de $B^{-1}(C^tC)B$, (C^t la matriz traspuesta de C).

Sabemos que det(B) = 1/det(B).
$\mathbf{det(B^{-1}(C^tC)B) =} det(B^{-1})\cdot det(C^tC)det(B) = (1/det(B))\cdot det(C^tC)det(B) = det(C^tC) =$

$= \det(C^t \cdot C) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **= 0**, por tener una fila de ceros.

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 Septiembre 2015

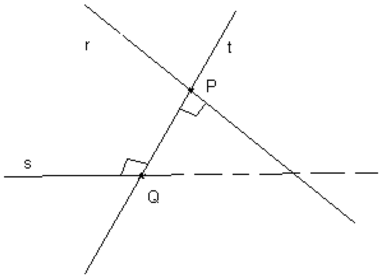
Sea *r* la recta definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y *s* la recta dada por $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$.

(a) [1’75 puntos] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.
(b) [0’75 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

Solución

Sea *r* la recta definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y *s* la recta dada por $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$.

(a)
Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.
Forma (1) de hacerlo



Ponemos ambas recta en paramétricas o en forma vectorial con un parámetro distinto. En la recta *s* tomando y = μ ∈ R, tenemos $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \quad \mu \\ z = -1 \end{cases}$

De la recta ”r” punto A(1,1,-2) y vector director **u** = (0,0,1)
De la recta ”s” punto B(1,0,-1) y vector director **v** = (1,1,0)

r ≡ (x,y,z) = (1,1,-2) + λ(0,0,1) = (1,1,-2+λ)
s ≡ (x,y,z) = (1,0,-1) + μ(1,1,0) = (1+μ,μ,-1)

De la recta r(A;**u**) tomamos un punto genérico X(x,y,z) = X(1,1,-2+λ)
De la recta s(B;**v**) tomamos un punto genérico Y(x,y,z) = Y(1+μ,μ,-1)
El vector **XY** tiene que ser perpendicular al vector director de “r” **u** y al vector director de “s” **v** a la vez, es decir su producto escalar (**•)** tiene que ser cero:
XY = (1+μ-1,μ-1, -1+2-λ) = (μ,μ-1,1-λ)
XY•u = 0 ⇒ (μ,μ-1,1-λ)•(0,0,1) = 0 = 1-λ = 0 → **λ = 1**
XY•v = 0 ⇒ (μ,μ-1,1-λ)•(1,1,0) = 0 = μ+μ-1 = 2μ-1 → **μ = 1/2**
Entrando en el punto genérico X con el valor de λ = 1, obtenemos el punto P que es P(1,1,-2+(1)) = P(1,1,-1)
Entrando en el punto genérico Y con el valor de μ = 1/2, obtenemos el punto Q que es Q(1+(1/2), (1/2),-1) = Q(3/2,1/2,-1)
La recta pedida “t” es la que pasa por los punto P y Q, es decir t(P;**QP**)

P(1,1,-1)
QP = (1 - 3/2, 1 - 1/2, 0) = (-1/2, 1/2, 0)
La recta pedida es **t** $\equiv$ **(x,y,z) = (1, 1, -1) +** $\boldsymbol{\delta}$**(-1/2, 1/2, 0) con** $\boldsymbol{\delta \in}$ **R**.
b)
Calcula la distancia entre r y s

La distancia entre las rectas "r" y "s" es d(r;s) = **||QP||** = $\sqrt{(1/2)^2+(1/2)^2+(0)^2}$ = $\sqrt{\mathbf{1/2}}$ u^1

Forma (2) de hacerlo
Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.
r $\equiv$ (x,y,z) = (1,1,-2) + λ(0,0,1); s $\equiv$ (x,y,z) = (1,0,-1) + μ(1,1,0)

La recta "t" la vamos a dar como intersección de dos planos π_1 y π_2
El vector **u**x**v** es un vector perpendicular a la vez a las recta "r" y "s", luego tiene la dirección de la recta pedida.

$$\mathbf{u}\text{x}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-1) - \mathbf{j}(0-1) + \mathbf{k}(0-0) = (-1,1,0)$$

Plano π_1 $\equiv$ det(A;**u**; **u**x**v**) = 0 , es decir plano que contiene a la recta "r" y al vector **u**x**v**, es decir:

$$\pi_1 \equiv \det(A;\mathbf{u};\mathbf{u}\text{x}\mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(0-1) - (y-1)(0+1) + (z)(0) = -x - y + 2 = 0$$

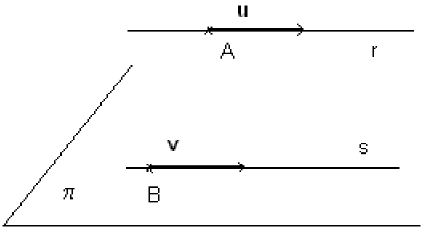
Plano π_2 $\equiv$ det(B;**v**; **u**x**v**) = 0, es decir plano que contiene a la recta "s" y al vector **u**x**v**, es decir:

$$\pi_2 \equiv \det(B;\mathbf{v};\mathbf{u}\text{x}\mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(0-0) - (y)(0-0) + (z+1)(1+1) = 2z + 2 = 0$$

La recta "t" pedida es $t \equiv \begin{cases} -x - y + 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$

b)
Calcula la distancia entre r y s

r $\equiv$ (x,y,z) = (1,1,-2) + λ(0,0,1); s $\equiv$ (x,y,z) = (1,0,-1) + μ(1,1,0)
Distancia de un punto de una recta a un plano que contiene a la otra y es paralelo a la primera

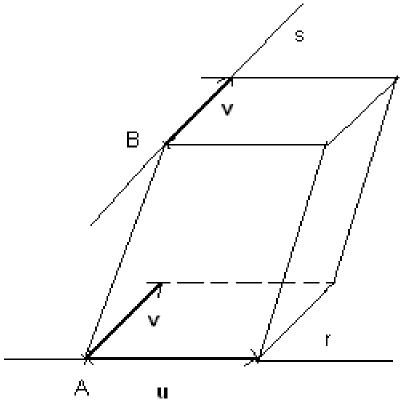


De "r" tenemos A(1,1,-2) y **u** = (0,0,1)
De "s" tenemos B(1,0,-1) y **v** = (1,1,0)
El plano π que contiene a la recta "s" y es paralelo a la recta "r" tiene de ecuación:
det(**BX,v,u**) = 0

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 = (x-1)(1-0) - (y)(1-0) + (z+1)(0-0) = x - y - 1 = 0$$

$$d(r;s) = d(A;\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|(1)-(1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ u^1$$

También podríamos calcular la distancia entre las rectas “r” y “s” por producto mixto.



Formamos el paralelepípedo determinado por los vectores **AB**, **u** y **v**

Volumen paralelepípedo = |{ **AB**, **u**, **v** }| = área base por altura = ||**u**x**v**||·d(r;s), de donde

d(r;s) = (| [**AB**, **u**, **v**] |) / (||**u**x**v**||)

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 3 Septiembre 2015

[2’5 puntos] Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un rio. El terreno debe tener 180000 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?.

Solución

Es un problema de optimización

Función a optimizar: Perímetro = x + 2y

Relación entre las variables: Área = 180000 m^2 = x·y, de donde y = 180000/x.

Perímetro = P(x) = x + 2y = x + 2(180000/x) = x + 360000/x.

Si P’(b) = 0 y P’’(b) > 0, x = b es un mínimo de P(x)

P(x) = x + 360000/x; P’(x) = 1 - 360000/x^2.

De P’(x) = 0, tenemos 1 - 360000/x^2 = 0, es decir 1 = 360000/x^2 = 0 $\rightarrow$ x^2 = 360000, luego x = $\pm\sqrt{}$(360000) = $\pm$ 600. Como es una longitud x = 600 m e y = 180000/600 = 300 m.

Las dimensiones del rectángulo son x = +600 m. e **y = +300 m.**

Veamos que es un mínimo es decir P’’(600) > 0

P’(x) = 1 - 360000/x^2 = 1 – 360000·x^{-2}; P’’(x) = + 720000·x^{-3} = 720000/x^3.

Como P’’(600) = 720000/(600)^3 = 1/300 > 0, x = (600) es un mínimo.

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 Septiembre 2015

Sea f : R → R definida por $f(x) = |x^2 – 4|$.

(a) [0'75 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = 5.

Solución

Sea f : R → R definida por $f(x) = |x^2 – 4|$.

(a)

Haz un esbozo de la gráfica de f.

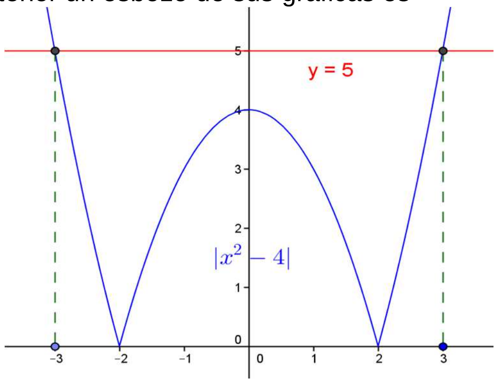
$f(x) = |x^2 – 4| = |h(x)|$.

Dibujamos primero la gráfica de $h(x) = x^2 - 4$, que es una parábola con las ramas hacia arriba $\cup$ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con abscisa del vértice en el nº que anula la 1ª derivada, es decir $h'(x) = 2x – 0 = 0$, de donde x = 0 y el vértice es V(0, h(0)) = V(0,-4), que es el mínimo de la parábola; puntos de corte en (0,-4), (-2,0) y (2,0), pues los valores de "x" que anulan $x^2 - 4 = 0$ son $x = \pm\sqrt{4}$, de donde x = -2 y x = 2.

Recordamos que la gráfica del valor absoluto |h(x)| es la misma que la de h(x), si $h(x) \ge 0$ (la gráfica está por encima del eje de abscisas OX), y simétrica respecto al eje OX, es decir gráfica de – h(x), si h(x) < 0 (la gráfica está por debajo del eje de abscisas OX).

La gráfica de y = 5 es la de una recta paralela al eje OX, de altura 5.

Temiendo en cuenta lo anterior un esbozo de sus gráficas es



(b)

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = 5.

Antes de hacerlo abrimos el valor absoluto, pues nos hará falta para calcular el área. (los puntos de división eran las soluciones de $x^2 – 4 = 0$, que nos salió x = -2 y x = 2.

$$f(x) = |x^2 – 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < -2 \\ -(x^2 - 4) & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Vemos que la gráfica es simétrica respecto al eje OY, por tanto sólo calculamos el área para $x \ge 0$, y lo multiplicamos por 2.

Veamos el corte de f(x) con y = 5 para $x \ge 0$. Resolvemos $x^2 – 4 = 5$, es decir $x^2 = 9$, de donde las abscisas de los cortes son x = -3 y x = 3.

Observando la figura, sabiendo que es simétrica respecto al eje OY, tenemos que obtener el área como suma de dos regiones, una es desde 0 a 2, y otra desde 2 a 3.

Área = $2\cdot[\int_0^2 (5 - (-x^2 + 4))dx + \int_2^3 (5 - (x^2 - 4))dx] = = 2\cdot[\int_0^2 (x^2 + 1)dx + \int_2^3 (-x^2 + 9)dx] =$
$= 2\cdot[x^3/3 + x]_0^2 + 2\cdot[-x^3/3 + 9x]_2^3 = 2\cdot[(8/3 + 2) - 0] + 2\cdot[(-27/3 + 27) - (-8/3 + 18)] =$
$= 2\cdot(14/3) + 2\cdot(8/3)\ u^2$ **$= 44/3\ u^2 \cong 14'667\ u^2$**.

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 Septiembre 2015

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$2x + y + (\alpha - 1)z = \alpha - 1$$
$$x \quad - \alpha y - 3z = 1$$
$$x \ + y + 2z = 2\alpha - 2$$

a) [1 punto] Resuelve el sistema para $\alpha = 1$.

b) [1'5 puntos] Determina, si existe, el valor de α para el que $(x,y,z) = (1,-3,\alpha)$ es la única solución del sistema dado.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$2x + y + (\alpha - 1)z = \alpha - 1$$
$$x \quad - \alpha y - 3z = 1$$
$$x \ + y + 2z = 2\alpha - 2$$

a)

Resuelve el sistema para $\alpha = 1$.

El sistema es:

$2x + y = 0 \quad \rightarrow 2x + y = 0 \quad \rightarrow 2x + y = 0$

$x \ - y - 3z = 1 \ (F_2 + F_1) \ \rightarrow 3x - 3z = 1 \ \ (F_2 + 3F_3) \ \rightarrow 3z = 1$, de donde **$z = 1/3$.**

$x \ + y + 2z = 0 \ \ (F_3 - F_1) \rightarrow -x \ + 2z = 0 \quad -x \ + 2z = 0$

Entrando con $z = 1/3$ en $-x + 2z = 0$, tenemos $-x + 2/3 = 0$, de donde **$x = 2/3$.**

Entrando con $x = 2/3$ en $2x + y = 0$, tenemos $2(2/3) + y = 0$, de donde **$y = -4/3$.**

La solución del sistema para $\alpha = 1$ es $(x,y,z) = (2/3, -4/3, 1/3)$.

b)

Determina, si existe, el valor de α para el que $(x,y,z) = (1,-3,\alpha)$ es la única solución del sistema dado.

Sustituyo la solución $(x,y,z) = (1,-3,\alpha)$ en el sistema dado y vemos si tiene sentido:

$2(1) + (-3) + (\alpha - 1)(\alpha) = \alpha - 1 \ \rightarrow \ -1 + \alpha^2 - \alpha = \alpha - 1 \rightarrow \alpha^2 - 2\alpha = 0$. Soluciones $\alpha = 0$ y $\alpha = 2$

$(1) \ - \alpha(-3) - 3(\alpha) = 1 \rightarrow \ 1 + 3\alpha - 3\alpha = 1 \rightarrow \ 0 = 0$. Cierto siempre sea cual sea α.

$(1) \ + (-3) + 2(\alpha) = 2\alpha - 2 \ \rightarrow \ -2 + 2\alpha = -2 + 2\alpha \ \rightarrow \ 0 = 0$. Cierto siempre sea cual sea α.

Luego $(x,y,z) = (1,-3,\alpha)$ es la única solución del sistema dado para $\alpha = 0$ y $\alpha = 2$.

Creía que estaba solucionado y aun no lo había corregido.

No terminé el problema, pues hay que ver si la solución es única para *$\alpha = 0$ y $\alpha = 2$*, es decir si rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & -\alpha & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de los coeficientes. $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha - 2 & \alpha - 1 \\ 1 & -\alpha & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2\alpha - 2 \end{pmatrix}$ matriz ampliada.

***Si $\alpha = 0$*,** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de los coeficientes. $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ matriz ampliada.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -0+0-(1)(-3+3) = 0$, tenemos que **rango(A) = 2.**

En A^* como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -0+0-(1)(1-1) = 0$, tenemos que **rango(A*) =**

= 2. Como si rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas, para α = 0 el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones. NO ES NUESTRO CASO

Si $\boldsymbol{\alpha = 2}$**,** A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de los coeficientes. A* = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ matriz ampliada.

Como det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} F_1 - 2F_2 \\ \\ F_3 - F_2 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array}$ = 0-(1)(25-21) = -4 $\neq$ 0, tenemos

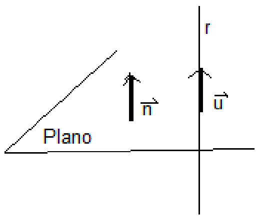
que **rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas, y *la solución es única.* Para α = 2 el sistema es compatible e indeterminado y tiene una única solución. ES NUESTRO CASO.**

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 Septiembre 2015

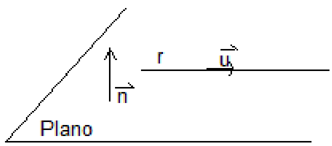
Considera el plano π de ecuación mx + 5y +2z = 0 y la recta *r* dada por
(x+1)/3 = y/n = (z-1)/2
(a) [1 punto] Calcula *m* y *n* en el caso en el que la recta *r* es perpendicular al plano π.
(b) [1 punto] Calcula *m* y *n* en el caso en el que la recta *r* está contenida en el plano π.

Solución

Considera el plano π de ecuación mx + 5y + 2z = 0 y la recta *r* dada por
(x+1)/3 = y/n = (z-1)/2
(a)
Calcula *m* y *n* en el caso en el que la recta *r* es perpendicular al plano π.
$\pi \equiv$ mx + 5y + 2z = 0. Un vector normal es **n** = (m,5,2)
"r" $\equiv$ (x+1)/3 = y/n = (z-1)/2. Un punto es A(-1,0,1) y un vector director es **u** = (3,n,2)



Si la recta "r" es perpendicular al plano "π" los vectores **n** y **u** son paralelos y por tanto sus coordenadas proporcionales, es decir m/3 = 5/n = 2/2, de donde obtenemos dos ecuaciones:
m/3 = 1, luego **m = 3**.
5/n = 1, luego **n = 5.**
(b)
Calcula *m* y *n* en el caso en el que la recta *r* está contenida en el plano π.



Si la recta "r" está contenida en el plano su punto A(-1,0,1) pertenece la plano, es decir m(-1) + 5(0) + 2(1) = 0 , de donde **m = 2**.
Como la recta está contenida en el plano, es paralela a él y por tanto los vectores **n** y **u** son perpendiculares y su producto escalar (•) es cero.
n•u = 0 = (m,5,2)•(3,n,2) = (2,5,2)•(3,n,2) = 6 + 5n + 4 = 5n + 10 = 0, de donde **n = -2**.